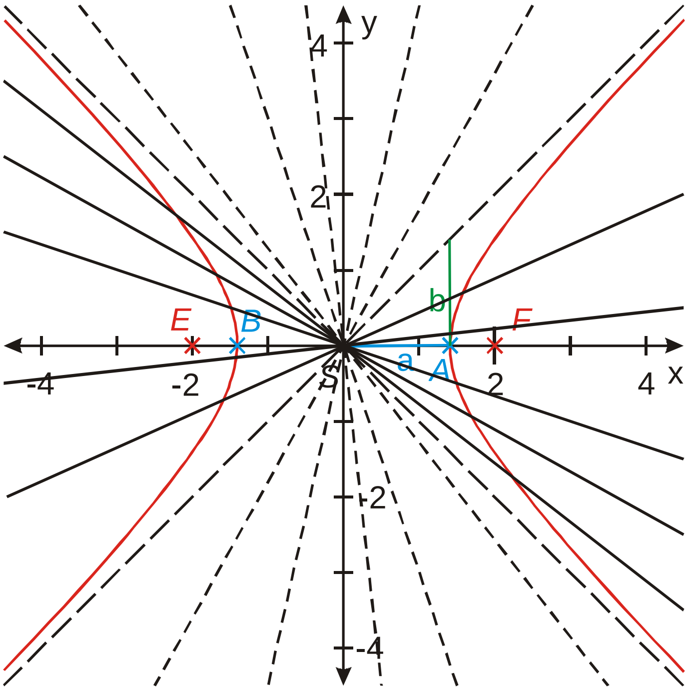
7.5.20 Hyperbola a přímka

Předpoklady: 7511, 7515, 7516, 7517, 7518

Na obrázku je nakreslena hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ se středem v počátku soustavy souřadnic. Jaká je vzájemná poloha této hyperboly a přímky, která prochází počátkem soustavy souřadnic?



Z obrázku je vidět, že mohou nastat dvě možnosti:

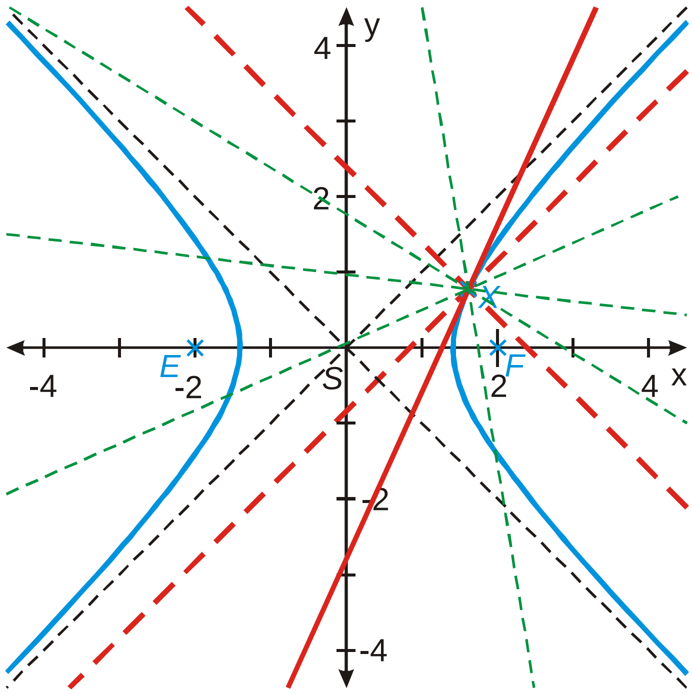
- přímka má s hyperbolou společné dva body (je její sečna) – plné čáry,
- přímka nemá s hyperbolou společný žádný bod (je její vnější přímka) – čárkované čáry.

O tom, do které skupiny přímka patří, rozhoduje její směrnice. Pokud začneme s přímkou $y=0$ a zvětšujeme její směrnici ke kladným nebo záporným číslům prvními přímkami, které nebudou mít s hyperbolou žádný průsečík, jsou asymptoty hyperboly $\Rightarrow$

- pro $k \in \left(-\frac{b}{a};\frac{b}{a}\right)$ je přímka $y=kx$ sečnou,
- pro $k \in \left(-\infty;-\frac{b}{a}\right\rangle \cup \left\langle\frac{b}{a};\infty\right)$ je přímka $y=kx$ vnější přímkou hyperboly.

Pedagogická poznámka: Žádný z obrázků není příliš přehledný. Při výuce ve třídě rozhodně doporučuji nakreslit hyperbolu na tabuli a jezdit po ní tyčkou.

Př. 1: Je dána hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a bod $T[x; y]$, který na ní leží. Jaké mohou nastat vzájemné polohy hyperboly a přímky procházející bodem *T*?



Všechny nakreslené přímky s výjimkou tří mají s hyperbolou dva společné body (na obrázku zelené čárkované čáry).
Tři přímky procházející bodem *X* mají s hyperbolou jeden společný bod:

- přímka nakreslená plnou červenou čarou = **tečna,**
- přímky nakreslené čárkovanou červenou čarou = **rovnoběžky s asymptotami** hyperboly.

$\Rightarrow$ Pokud zjistíme, že přímka má s hyperbolou jediný společný bod, neznamená to, že je její tečnou.

Jak napíšeme rovnici tečny hyperboly v jejím bodě $X_0[x_0; y_0]$?
Stejně jako u elipsy:

- Rovnice hyperboly: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.
- Rozložíme závorky na součin: $\frac{(x-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y-n)}{b^2} = 1$.
- Jednu z neznámých v každém zlomku zaměníme za souřadnici bodu $X_0[x_0; y_0]$:
- $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$.

Má-li hyperbola rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ **má její tečna s bodem dotyku** $X_0[x_0; y_0]$ **rovnici:** $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$**.**

Má-li hyperbola rovnici $\frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1$ má její tečna s bodem dotyku $X_0[x_0;y_0]$ rovnici: $\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}-\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}=1$.

Př. 2: Napiš rovnici tečny hyperboly v jejím daném bodě:

a) $(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{3}=1,\ T[4;2]$ b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1,\ T\left[\frac{25}{4};-3\right]$

a) $(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{3}=1,\ T[4;2]$

Dosadíme do rovnice tečny: $(x_0-2)(x-2)-\frac{(y_0+1)(y+1)}{3}=1$.

$(4-2)(x-2)-\frac{(2+1)(y+1)}{3}=1$

$2(x-2)-\frac{3(y+1)}{3}=1$

$2x-4-(y+1)=1$

$2x-y-6=0$

b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1,\ T\left[\frac{25}{4};-3\right]$

Dosadíme do rovnice tečny: $\frac{x_0x}{25}-\frac{y_0y}{16}=1$.

$\frac{\frac{25}{4}x}{25}-\frac{(-3)y}{16}=1$

$\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1 \quad /\cdot 16$

$4x+3y-16=0$

Př. 3: Urči vzájemnou polohu přímky $5x-4y+9=0$ a hyperboly $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$.

Budeme postupovat jako obvykle – najdeme počet průsečíků přímky s hyperbolou a podle něj se rozhodneme.

$5x-4y+9=0 \Rightarrow y=\frac{5x+9}{4}$

V rovnici hyperboly se zbavíme zlomků: $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1 \quad /\cdot 16\cdot 25$.

$16y^2-25x^2=400$ dosadíme za *y*: $16\left(\frac{5x+9}{4}\right)^2-25x^2=400$.

$$16\left(\frac{25x^2+90x+81}{16}\right)-25x^2=400$$

$25x^2+90x+81-25x^2=400$

$90x=319$

$x=\frac{319}{90}$, dopočteme y, i když je to zbytečné $y=\frac{5x+9}{4}=\frac{481}{72}$.

Přímka se protíná s hyperbolou v jediném bodě $\Rightarrow$ dvě možnosti: tečna nebo rovnoběžka s asymptotou.

Určíme rovnice asymptot: $\left(\frac{y}{5}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2=\left(\frac{y}{5}-\frac{x}{4}\right)\left(\frac{y}{5}+\frac{x}{4}\right)=0$.

$\frac{y}{5}=\frac{x}{4}\Rightarrow 4y+5x=0$

$\frac{y}{5}=-\frac{x}{4}\Rightarrow 4y-5x=0$ $\Rightarrow$ tato asymptota je rovnoběžná se zadanou přímkou.

Přímka $5x-4y+9=0$ má hyperbolou $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ jediný společný bod, není však její tečnou, ale je přímkou rovnoběžnou s její asymptotou.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladě samozřejmě někteří objeví jediný průsečík a ihned prohlásí přímku za tečnu.

Př. 4: Najdi přímku rovnoběžnou s přímkou $4x+y+1=0$, která je tečnou hyperboly $4x^2-y^2-12=0$.

Rovnice hyperboly ve středovém tvaru: $4x^2-y^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$.

$\Rightarrow$ $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ přímka $4x+y+1=0$ není rovnoběžná ani s jednou asymptotou.

Všechny přímky rovnoběžné s přímkou $4x+y+1=0$: $4x+y+c=0$.

Určíme hodnotu parametru c tak, aby přímka měla s parabolou jediný průsečík:

$4x+y+c=0\Rightarrow y=-4x-c$ dosadíme do rovnice hyperboly: $4x^2-y^2=12$.

$4x^2-(-4x-c)^2=12$

$4x^2-(16x^2+8cx+c^2)=12$

$4x^2-16x^2-8cx-c^2=12$

$12x^2+8cx+c^2+12=0$

O počtu průsečíků rozhoduje diskriminant:

$D=b^2-4ac=(8c)^2-4\cdot 12\cdot(c^2+12)=64c^2-48c^2-4\cdot 12^2=0$

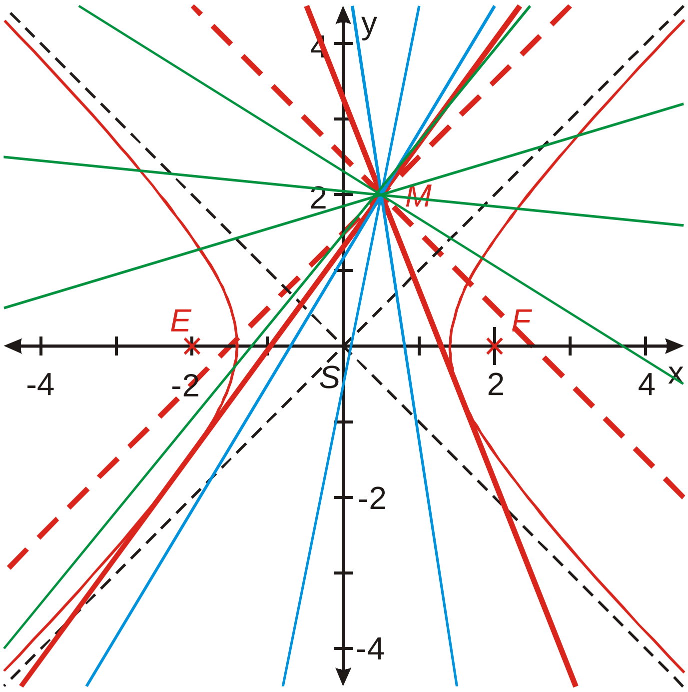
$16c^2-4\cdot 4\cdot 4\cdot 3^2=0 \quad /:16$

$c^2-6^2=0$

$(c-6)(c+6)=0$ $\Rightarrow$ dva kořeny $c_1=6$, $c_2=-6$

Tečnami hyperboly $4x^2-y^2-12=0$ rovnoběžnými s přímkou $4x+y+1=0$ jsou přímky $4x+y+6=0$ a $4x+y-6=0$.

Př. 5: Je dána hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a bod $M[x;y]$, který na ní neleží. Jaké mohou nastat vzájemné polohy hyperboly a přímky procházející bodem *M*?



Vznikl správný chaos. Přesto jsou z obrázku uvidět čtyři možnosti:

- modré přímky, které nemají hyperbolou žádný společný bod,
- zelené přímky, které mají s hyperbolou dva společné body,
- červené čárkované přímky, které mají s hyperbolou jediný společný bod, nejsou však jejími tečnami, jsou rovnoběžné z jednou z asymptot,
- červené plné přímky, které mají s hyperbolou jediný společný bod a jsou jejími tečnami.

Př. 6: Najdi všechny tečny hyperboly $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$, které procházejí bodem $M[3;-6]$.

Nejdřív si prohlídneme rovnici hyperboly:
$a=b=3 \Rightarrow$ hyperbola je rovnoosá $\Rightarrow$ asymptoty mají rovnice $y=\pm x$.

Použijeme klasickou metodu hledání pomocí parametru:
Všechny přímky procházející bodem $M[3;-6]$: $(y-y_0)=k(x-x_0)$ po dosazení:
$(y+6)=k(x-3)$.
Po úpravě: $y=kx-3k-6$.

Dosadíme do rovnice hyperboly: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \quad /\cdot 9$.

$x^2-y^2=9$

$x^2-(kx-3k-6)^2=9$

$x^2-\left[k^2x^2-3k^2x-6kx-3k^2x+9k^2+18k-6kx+18k+36\right]=9$

$x^2 - k^2x^2 + 3k^2x + 6kx + 3k^2x - 9k^2 - 18k + 6kx - 18k - 36 = 9$

$x^2\left(1-k^2\right) + 6k^2x + 12kx - 9k^2 - 36k - 45 = 0$

$x^2\left(1-k^2\right) + \left(6k^2 + 12k\right)x - 9k^2 - 36k - 45 = 0$

Důležitý je koeficient $a = 1 - k^2$.

Když se rovná nule, jde o lineární rovnici s jediným řešením: $a = 1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$.

Určíme rovnice přímek v těchto případech:

- $k = 1$: $(y+6) = 1(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = x - 9$ - rovnoběžka s asymptotou
- $k = -1$: $(y+6) = -1(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = -x - 3$ - rovnoběžka s asymptotou

Tečny jsme zatím nenašli.

Předpokládáme, že platí $k \neq \pm 1 \Rightarrow$ kvadratická rovnice, o počtu řešení rozhoduje diskriminant: $D = b^2 - 4ac = \left(6k^2 + 12\right)^2 - 4\left(1-k^2\right)\left(-9k^2 - 36k - 45\right) = 0$

$36\left(k^2 + 2k\right)^2 + 4 \cdot 9\left(1-k^2\right)\left(k^2 + 4k + 5\right) = 0 \quad / : 36$

$\left(k^2 + 2k\right)^2 + \left(1-k^2\right)\left(k^2 + 4k + 5\right) = 0$

$k^4 + 4k^3 + 4k^2 + \left[k^2 + 4k + 5 - k^4 - 4k^3 - 5k^2\right] = 0$

$k^4 + 4k^3 + 4k^2 + k^2 + 4k + 5 - k^4 - 4k^3 - 5k^2 = 0$

$4k + 5 = 0$

$k = -\frac{5}{4}$ - pouze jediné řešení, což je trochu překvapení.

Dopočítáme tečnu: $(y+6) = -\frac{5}{4}(x-3) \quad / \cdot 4$.

$4y + 24 = -5x + 15$

$5x + 4y + 9 = 0$

Zbývá vyřešit, proč jsme nenašli dvě tečny (pro body jako je M musí existovat dvě tečny)

Nenapsali jsme všechny přímky, které prochází bodem $M[3;-6]$, chybí nám přímka $x = 3$ (nejde napsat ve směrnicovém tvaru).

Dosadíme přímku $x = 3$ do rovnice hyperboly a zjistíme počet průsečíků:

$x^2 - y^2 = 3^2 - y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 0$

$\Rightarrow$ přímka $x = 3$ se dotýká paraboly v jejím vrcholu.

Hyperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ má dvě tečny, které procházejí bodem $M[3;-6]$

$x = 3$ a $5x + 4y + 9 = 0$.

Př. 7: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

Shrnutí: Jediný průsečík mají s hyperbolou kromě tečen i přímky rovnoběžné s asymptotami.